

LABORATORIUM
OPTYKA GEOMETRYCZNA I FALOWA

Instrukcja do ćwiczenia nr 52

**Temat: Wyznaczanie stałej Rydberga,
energii jonizacji wodoru
i masy zredukowanej elektronu
z widma atomu wodoru**

I. Wymagania do ćwiczenia

1. Model Bohra atomu wodoru i atomów wodoropodobnych, poziomy energetyczne
2. Stała Rydberga, energia jonizacji atomu wodoru, masa zredukowana
3. Promieniowanie gazów, widmo emisyjne
4. Zasada działania spektrometru pryzmatycznego

Literatura

Skrypt PRz, Fizyka I pracownia, Rzeszów 2017, str. 227-229, str. 236-250

1. J.M. Massalski, M. Massalska, Fizyka współczesna, WNT, Warszawa, 2012
2. I.W. Sawieliew, Wykłady z fizyki, t. 3, PWN Warszawa, 1994, str. 57-74

II. Wprowadzenie do tematyki ćwiczenia

Pierwszym, który opisał atom wodoru w sposób dający wyniki zgodne z doświadczeniem, był Niels Bohr. Założył on, że wokół dodatnio naładowanego jądra krąży po orbicie kołowej o promieniu r ujemnie naładowany elektron o masie m_e . Oba ładunki e są równe co do wartości bezwzględnej, a jądro jest dużo cięższe niż elektron.

W takim układzie siła oddziaływań elektrycznych pełni rolę siły dośrodkowej:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad F_d = \frac{m_e v^2}{r} \quad (1)$$

Z warunku tożsamości obu powyższych sił otrzymujemy:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = \frac{m_e v^2}{1} \quad (2)$$

Energie elektronu na danej orbicie, potencjalna elektrostatyczna i kinetyczna, wynoszą

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad E_k = \frac{m_e v^2}{2} \quad (3)$$

Za pomocą równania (2) możemy wygodnie obliczyć energię całkowitą:

$$E = E_p + E_k = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (4)$$

Oznaczając przez v prędkość liniową elektronu, możemy obliczyć pęd i moment pędu elektronu:

$$p = m_e v, \quad L = pr = m_e v r \quad (5)$$

Żeby otrzymać wyniki zgodne z doświadczeniem, Bohr założył, że **moment pędu elektronu znajdującego się na danej orbicie może przyjmować wartości równe jedynie wielokrotnościom pewnej wartości, zwanej zredukowaną stałą Plancka \hbar , czyli**

$$L = m_e v r = n\hbar \quad (6)$$

Zestawiając równania (2) i (6) i rozwiązując powstały układ równań otrzymujemy promień n -tej orbity elektronu

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} n^2 \quad (7)$$

Inne orbity są niedozwolone. Ciekawe jest, że to proste założenie Bohra o momencie pędu elektronu bardzo dobrze tłumaczy współczesna mechanika kwantowa.

Wstawiając zależność (7) do (4) otrzymujemy energię na n -tej orbicie (n -tym poziomie energetycznym)

$$E = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (8)$$

Energia ta jest ujemna, co jest odbiciem oczywistego faktu, że atom dzięki przyciągającym siłom elektrycznym stanowi układ trwale związany (bez wpływów zewnętrznych). Jednak, co bez uwzględnienia mechaniki kwantowej jest dziwne, energia ta nie jest dowolna w miarę, jak elektron znajdowałby się coraz dalej od jądra, ale jest kwantowana, czyli zależna od n , zwanego główną liczbą kwantową.

Warto zastanowić się, jaką energię trzeba dostarczyć atomowi wodoru znajdującemu się w stanie podstawowym $n=1$, żeby zjonizować atom, czyli trwale oderwać elektron oddalając go na odległość $r \rightarrow \infty$, kiedy to zgodnie ze wzorem (7) $n \rightarrow \infty$. Energia ta, oznaczona E_o , jest różnicą energii w stanie zjonizowanym $n \rightarrow \infty$ i w stanie podstawowym $n=1$, czyli na podstawie wzoru (8)

$$E_o = E_\infty - E_1 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{1^2} \right] = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \quad (9)$$

Wykorzystując zależność (9), energię (8) na n -tym poziomie można wyrazić wzorem

$$E_n = -\frac{E_o}{n^2} \quad (10)$$

Zgodnie z modelem emisji światła przez rozrzedzone gazy, atom znajdujący się początkowo w stanie podstawowym po dostarczeniu mu energii na skutek zderzeń termicznych, lub przepływu prądu przez gaz, albo naświetlania promieniowaniem, zwiększa swoją energię z E_1 do E_n , co jest tożsame z przeskokiem elektronu z poziomu podstawowego na wyższy poziom energetyczny. Na tym wyższym poziomie (o liczbie kwantowej n) elektron pozostaje bardzo krótko, przeskakując na któryś z niższych poziomów (o liczbie kwantowej m) i emitując przy tym kwant energii w postaci fotonu, który z kolei jest reprezentowany przez falę elektromagnetyczną o częstotliwości ν i długości fali λ . Energia tego fotonu, zgodnie z hipotezą de Broglie'a dana wzorem $E_f = h\nu$, gdzie $h = 2\pi\hbar$, jest równa różnicy energii obu poziomów energetycznych

$$E_f = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \frac{E_o}{m^2} - \frac{E_o}{n^2} \quad (11)$$

Stąd długość fali emitowanego fotonu jest równa

$$\lambda = \frac{hc}{E_o} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)^{-1} = \left[R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \right]^{-1} \quad (12)$$

W przypadku obserwowanym optycznie w ćwiczeniu widzialne długości fal powstają przy przeskoku elektronu z wyższych poziomów energetycznych $n = 3, 4, 5, 6, \dots$ na poziom $n = 2$.

Stała występująca w powyższym wzorze nosi nazwę stałej Rydberga

$$R = \frac{E_o}{hc} \quad (13)$$

W przypadku gdy masa jądra nie jest nieskończona, to klasycznie elektron krąży nie wokół jądra, ale wokół wspólnego środka masy. Ponowne przeliczenie powyższych zależności daje podobne wzory z tą tylko różnicą, że zamiast masy m_e występuje tzw. masa zredukowana

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \quad (14)$$

Ponieważ $m_p \gg m_e$, to masa zredukowana μ niewiele różni się od masy elektronu m_e .

Spektroskop

Dla spektroskopu użytego w doświadczeniu słuszna jest następująca przybliżona zależność wiążąca długość fali λ z mierzoną wielkością L

$$\lambda = \frac{1}{(aL + b)^2} \quad (15)$$

zwana zmodyfikowaną formułą dyspersyjną Cauchy'ego.

Formułę tę można przekształcić następująco

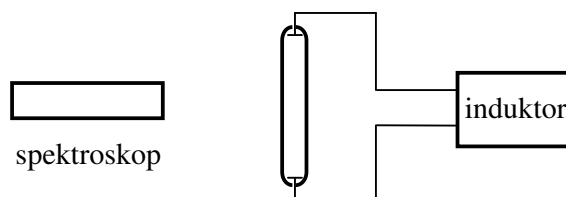
$$\lambda^{\frac{5}{2}} = aL + b \quad (16)$$

Po przyjęciu $y = \lambda^{-5/2}$, $x = L$, można użyć dopasowania metodą najmniejszych kwadratów dla prostej $y = ax + b$ w celu znalezienia parametrów a i b , a tym samym zależności $\lambda(L)$.

III. Metodologia wykonania pomiarów

1. Zestawić układ pomiarowy według schematu z rys. 1. Ustawić przed szczeliną spektroskopu rurkę Plückera napełnioną helem tak, by na matówce w okularze lunety spektroskopu oglądać intensywne widmo liniowe.

Przed uruchomieniem przyrządów zgłosić się do prowadzącego ćwiczenia, aby w jego obecności włączyć induktor wytwarzający wysokie napięcie. Podczas wykonywania ćwiczenia nie dotykać przewodów elektrycznych ani rurki Plückera z gazem. Napięcie zasilające wynosi kilka tysięcy woltów!



Rurka Plückera

Rys. 1. Schemat układu pomiarowego

- W celu wyskalowania przyrządu, przesuając pokrętko skali spektroskopu odczytać położenie L wszystkich linii widmowych helu. Zanotować odpowiadające im długości fal według tabeli.
Zanotować także dane potrzebne do obliczenia niepewności pomiaru.

Tabela pomiarowa

L	λ	barwa	nateżenie	y
[-]	[μm]			[$\mu\text{m}^{-2.5}$]
	0.7065	czerwona	słaba	
	0.6678	czerwona	silna	
	0.5876	żółta	bardzo silna	
	0.5048	zielona	słaba	
	0.5016	zielona	silna	
	0.4922	zielono-niebieska	umiarkowana	
	0.4713	niebieska	silna	
	0.4471	fioletowa	silna	
	0.4388	fioletowa	bardzo słaba	

- Wyłączyć zasilanie prądem**, usunąć rurkę Plückera napełnioną helem i przed szczeliną ustawić rurkę z wodorem. Włączyć zasilanie.
- Widzialna część atomowego widma wodoru składa się z czterech linii widmowych: czerwonej H_α , niebieskiej H_β i dwu fioletowych H_γ i H_δ .
Odczytać położenie L_H tych linii na skali spektroskopu.
- Wyłączyć zasilanie prądem**, usunąć rurkę Plückera.

IV. Obliczenia

- Narysować wykres $\lambda(L)$ dla helu oraz wykres $y(L)$, gdzie $y=\lambda^{-2.5}$.
- Metodą najmniejszych kwadratów dopasować do punktów $y(L)$ prostą $y=a\cdot L+b$ (wzór 16), znajdując a , b , $u(a)$, $u(b)$.
- Na wykresie $y(L)$ narysować dopasowaną prostą (wzór 16), a na wykresie $\lambda(L)$ narysować dopasowaną krzywą dyspersyjną daną wzorem (15).
- Z zależności (15) znaleźć nieznanne długości fal λ_H dla linii widmowych wodoru korzystając ze zmierzonych L_H .
- Oszacować niepewność $u(L_H)$ metodą typu B.
- Obliczyć niepewności $u(\lambda_H)$ dla każdej linii wodoru metodą przenoszenia niepewności, z niepewności $u(a)$, $u(b)$, $u(L_H)$, na podstawie wzoru (15).
- Obliczyć stałą Rydberga R przekształcając wzór (12) dla każdej linii o długości λ_H . Należy przyjąć $m=2$, $n=3,4,5,6$.
- Obliczyć $u(R)$ metodą przenoszenia niepewności bazując na $u(\lambda_H)$ dla każdej linii λ_H . Powyższe wyniki zapisać w tabeli

L_H	$u(L_H)$	λ_H	$u(\lambda_H)$	R	$u(R)$
[-]	[-]	[μm]	[μm]	[]	[]

9. Obliczyć średnią stałą Rydberga R_{sr} oraz jej niepewność $u(R_{sr})$ metodą średniej ważonej, ponieważ niepewności $u(R_i)$ są różne. Należy skorzystać z następujących wzorów na średnią X_{sr} wielu wielkości X_i oraz jej niepewność $u(X_{sr})$

$$X_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i W_i}{\sum_{i=1}^k W_i}, \quad W_i = \frac{1}{[u(X_i)]^2}, \quad u(X_{sr}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k W_i}}$$

10. Obliczyć energię jonizacji E_o atomu wodoru przekształcając wzór (13).
Obliczyć niepewność $u(E_o)$ metodą przenoszenia niepewności na bazie $u(R)$.
11. Obliczyć masę zredukowaną μ przekształcając wzór (9) i przyjmując $\mu=m$.
Obliczyć niepewność $u(\mu)$ metodą przenoszenia niepewności na bazie $u(E_o)$.
12. We wnioskach zapisać poprawnie wyniki R, E_o, μ .
Porównać też (za pomocą odpowiednich niepewności) te wyniki z odpowiednimi wartościami tabelarycznymi.

Obliczenia nadobowiązkowe:

Ponieważ wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów współczynniki a i b są skorelowane, to niepewności $u(\lambda_H)$ można dokładniej obliczyć w punkcie 6 metodą przenoszenia niepewności jako

$$u(\lambda_H) = \sqrt{\left[\frac{\partial \lambda}{\partial L} u(L_H)\right]^2 + \left[\frac{\partial \lambda}{\partial a} u(a)\right]^2 + \left[\frac{\partial \lambda}{\partial b} u(b)\right]^2 + 2r \frac{\partial \lambda}{\partial a} \frac{\partial \lambda}{\partial b} u(a)u(b)}$$

gdzie r jest współczynnikiem korelacji obliczanym przez metodę najmniejszych kwadratów

$$r = -\frac{\sum_i x_i}{\sqrt{n \sum_i x_i^2}}, \quad \text{gdzie } x=L, i=1, \dots, 9$$