

LABORATORIUM
METROLOGIA OPTYCZNA WŁASNOŚCI
MECHANICZNYCH

Instrukcja do ćwiczenia 1 i 2

**BADANIE SZTYWNOŚCI WŁOSA METODĄ
DYFRAKCYJNĄ**

1. Cel i zakres ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie sztywności włosa, a dokładniej jego modułu Younga, za pomocą pomiaru ugięcia włosa pod obciążeniem i pomiaru średnicy włosa metodą dyfrakcyjną.

2. Wiadomości teoretyczne. Dyfrakcja Fraunhofera na pojedynczym otworze

Rozpatrzmy teraz zjawiska związane z przechodzeniem światła emitowanego ze źródła S przez otwór w nieprzeźroczystej przesłonie. Po przeciwnej stronie przesłony z otworem w pewnej odległości znajduje się ekran, służący do obserwacji wytworzonych obrazów.

Okazuje się, że w opisanych wyżej warunkach zaobserwować można obrazy, których nie da się wytłumaczyć przy pomocy optyki geometrycznej i których wytłumaczenie wymaga uwzględnienia falowej natury światła (pomimo, że mamy tylko jeden otwór i nie ma, wobec tego, efektów interferencyjnych). Przypomnijmy, że rozróżniamy zjawisko *dyfrakcji*, czyli ugięcia fali świetlnej na pojedynczym otworze i zjawisko *interferencji*, związane ze wzajemnym oddziaływaniem nakładających się fal świetlnych przechodzących przez różne otwory.

2.1. Zasada Huygensa-Fresnela i zasada Babineteta

Wyobraźmy sobie najpierw, że pomiędzy źródłem S i punktem obserwacyjnym P nie ma żadnej przesłony; wówczas pole w punkcie P będzie całkowicie określone przez pole fali świetlnej E_S emitowanej przez źródło S:

$$E_1(P) = E_S. \quad (1)$$

W powyższym zapisie pomijamy strzałki wektorowe; stosujemy bowiem prostszy, skalarny opis światła, w którym zaniedbujemy polaryzację (jest to podejście, którego używali Huygens, Fresnel i Kirchhoff, autorzy sformułowania teorii interferencji i dyfrakcji).

W następnym kroku wyobraźmy sobie, że pomiędzy źródło S i punkt P wprowadziliśmy nieprzeźroczystą przesłonę z otworem, ale otwór jest zamknięty "zatyczką", wykonaną z tego samego materiału. Mamy wówczas:

$$E_2(P) = E_{\text{przesłony}} + E_{\text{zatyczki}} = 0, \quad (2)$$

gdzie $E_2(P)$ jest całkowitym polem fali świetlnej w punkcie P ekranu, a $E_{\text{przesłony}}$ i E_{zatyczki} oznaczają pola wyindukowane dzięki obecności, odpowiednio, przesłony z otworem i zatyczki zamykającej ten otwór. Oczywiście, ponieważ przesłona jest nieprzeźroczysta i otwór jest zasłonięty, pole to musi być równe zero. Istnienie pól $E_{\text{przesłony}}$ i E_{zatyczki} wynika wprost z zasady superpozycji; jeśli skutek wprowadzenia do układu ośrodka materialnego (przesłona z zatyczką), jakiegoś, obecne przedtem pola znikają, to musi to być konsekwencją wytworzenia przez ten ośrodek odpowiednich kompensujących pól. Fizyczne pochodzenie tych pól nie jest wcale takie tajemnicze; materia składa się przecież z ładunków elektrycznych, które pod wpływem zewnętrznych pól elektrycznych będą wykonywać drgania wytwarzając dzięki temu te dodatkowe pola o tej samej częstotliwości.

Przy odsłoniętym otworze (oczywiście jest to sytuacja, która nas najbardziej interesuje):

$$E_3(P) = E_{\text{przesłony}}, \quad (3)$$

a więc, z dwóch ostatnich równań mamy:

$$E_3(P) = -E_{\text{zatycki}}. \quad (4)$$

Jest to bardzo interesujący i może trochę zaskakujący wynik; pole pochodzące od fali świetlnej za przesłoną z otworem jest, z dokładnością do znaku, równe polu pochodzącemu od elementu dopełniającego (zatycki) zasłaniającego otwór. Wynik ten stanowi podstawę tzw. zasady Huygensa-Fresnela która opiera się na idei fikcyjnych oscylatorów rozłożonych na powierzchni otworu (będziemy te oscylatory nazywali oscylatorami Huygensa). Zasada ta stwierdza, że każdy punkt czoła fali może być uważany za źródło nowej fali wtórnej (fikcyjny oscylator Huygensa). Obwiednia tych fal tworzy nowe czoło fali. Ilościowe (choć uproszczone) sformułowanie tej zasady przedstawimy za chwilę. Inny ciekawy wniosek, wynikający z powyższych rozważań, stanowi podstawę zasady Babinet'a; która mówi, że ponieważ

$$E_{\text{przesłony}} + E_{\text{zatycki}} = 0, \text{ czyli } E_{\text{przesłony}} = -E_{\text{zatycki}} \quad (5)$$

zatem pola są z dokładnością do znaku równe, a więc także obrazy dyfrakcyjne od otworu i komplementarnego do niego elementu dopełniającego są takie same. Spodziewamy się zatem, że na przykład obrazy dyfrakcyjne od szczeliny i pręta o tej samej szerokości będą podobne.

2.2. Dyfrakcja Fraunhofera na długiej szczelinie

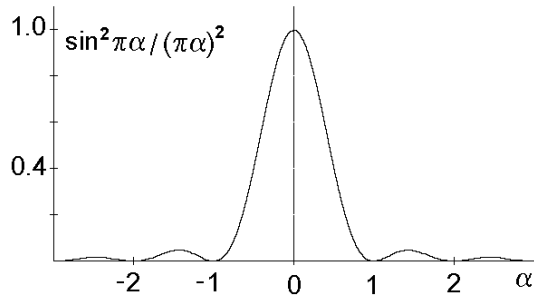
Jeżeli równoległe światło spójne o długości fali λ pada na długą szczelinę o szerokości d , to na ekranie umieszczonym w odległości f otrzymamy obraz dyfrakcyjny o następującym rozkładzie amplitudy fali

$$E(\theta) = E_o \frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta\right)}{\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta}, \quad (6)$$

gdzie θ jest kątem jaki tworzy półprosta wychodząca ze szczeliny i przechodząca przez dany punkt na ekranie z kierunkiem pierwotnego biegu promieni świetlnych.

Natomiast natężenie światła w punkcie obserwacji jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy:

$$I(\theta) = I_o \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta\right)}{\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta} \right]^2 \quad (7)$$



Rys. 1. Funkcja tworząca czynnik dyfrakcyjny dla długiej szczeliny.

$$\alpha = \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

Funkcji typu $\sin^2 x/x^2$ występująca w powyższym wzorze jest pokazana na rys. 1. Maksymalną wartość funkcji otrzymujemy w punkcie $\alpha = 0$, ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \max$. Wszystkie wartości zerowe pokazanej funkcji, z wyjątkiem jednego (środkowego), odpowiadają zerom funkcji sinus, zatem ciemne miejsca na ekranie odpowiadają wartości parametru α równej $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, itd. Dlatego położenie ciemnych prążków jest opisane zależnością

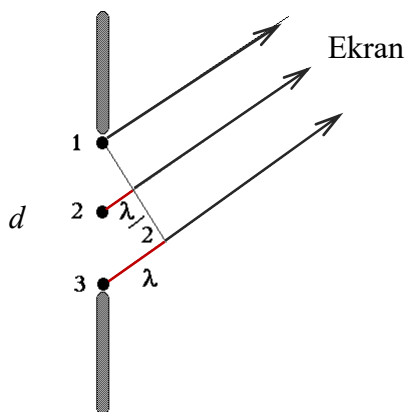
$$\alpha = \frac{d}{\lambda} \sin \theta = \pm n, \quad \text{czyli} \quad \sin \theta = \pm n \frac{\lambda}{d} \quad (8)$$

gdzie n jest liczbą naturalną, a dla małych kątów, dla których $\sin \theta \approx \text{tg} \theta = y/L$,

$$y = \pm n \frac{\lambda L}{d} \quad (9)$$

gdzie L jest odległością ekranu od szczeliny.

Warto zwrócić uwagę, że w przypadku interferencji dla kąta θ równego λ/d występuje jedno z maksimum głównych (rzędu $n=1$); natomiast w omawianym tu przypadku dyfrakcji mamy, wprost przeciwnie, minimum. Wytłumaczenie jest bardzo proste. W przypadku interferencji (wiele otworów), kątowi λ/d odpowiada różnica dróg do punktu P od sąsiednich otworów równa λ , co oznacza różnicę faz 2π , zatem interferencję konstruktywną.



Rys. 2. Destruktywna interferencja od punktów rozłożonych wzdłuż otworu dla kierunku wyznaczonego przez kąt $\theta = \lambda/d$.

W przypadku dyfrakcji (jeden otwór), różnica faz pomiędzy skrajnymi punktami szczeliny (1 i 3, rys. 2) wynosi co prawda 2π , jednak różnica faz pomiędzy punktami 2 i 3 wynosi tylko π i ich wkłady do natężenia światła w punkcie P ekranu zniósł się całkowicie. W ten sposób

każdemu punktowi z górnej “połówki” (od 1 do 2), można przyporządkować punkt z dolnej “połówki” (od 2 do 3) tak, że różnica faz pomiędzy nimi wyniesie dokładnie π . W rezultacie suma pól falowych wygenerowanych przez wszystkie punkty szczeliny w kierunku wyznaczonym przez kąt $\theta = \lambda/d$ wyniesie dokładnie zero.

Podsumowanie

1. Zasada Huygensa mówi, że każdy punkt do którego dociera czoło fali staje się źródłem nowej fali elementarnej. Superpozycja (dodawanie) wszystkich fal elementarnych daje nowe czoło fali.
2. W oparciu o zasadę Huygensa, pole fali świetlnej w dowolnym punkcie na ekranie można znaleźć całkując (sumując) wkłady od punktów (oscylatorów Huygensa) rozmieszczonych na powierzchni otworu.
3. Położenie minimów natężenia światła w obrazie dyfrakcyjnym dla długiej szczeliny (lub przeszkody, zgodnie z zasadą Babinet’a) dane jest zależnością

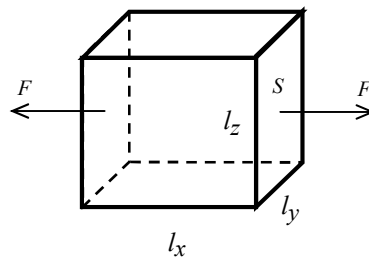
$$\sin \theta \cong n \frac{\lambda}{d}$$

gdzie d jest szerokością szczeliny (przeszkody).

2.3. Prawo Hooke’a, moduł Younga

Naprężeniem (prostym) materiału nazywamy stosunek siły (rozciągającej lub ściskającej) dany element materiału do powierzchni poprzecznej (rys. 3).

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (10)$$



Rys. 3. Schemat działania siły naprężenia

Pod wpływem takiej siły element rozciąga się o Δx .

Odształceniem względnym ε (w kierunku z) nazywamy stosunek wydłużenia do oryginalnego rozmiaru

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{czyli} \quad \varepsilon = \frac{\Delta x}{l_x} \quad (11)$$

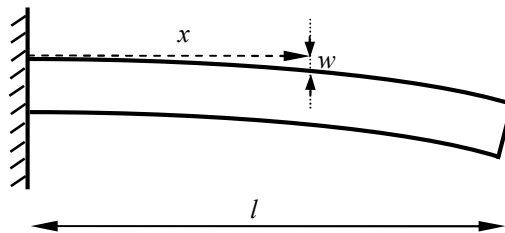
Dla małych odształceń obowiązuje prawo Hooke’a

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (12)$$

gdzie E jest modułem Younga dającym informację o sztywności czyli odporności na odształcenie ε pod wpływem naprężenia σ .

2.4. Ugięcie belki

Belką nazywamy element mechaniczny o długości dużo większej niż szerokość i wysokość, który poddawany jest obciążeniom poprzecznym. Taką belką będzie u nas włos zginający się pod wpływem swojego ciężaru. Rozpatrujemy tu przypadek, gdy belka zamocowana jest sztywno na jednym końcu, natomiast drugi koniec pozostaje swobodny. Dodatkowo zakładamy, że właściwości mechaniczne, czyli przekrój poprzeczny i moduł Younga, są na całej długości belki takie same.



Rys. 4. Belka o długości l pod wpływem obciążenia uginająca się o w w miejscu o współrzędnej x .

Jeżeli obciążenie poprzeczne przyłożone jest jednakowo na całej długości belki, tak jak to jest na przykład w przypadku obciążenia pod wpływem siły grawitacji, to z teorii Eulera-Bernoulliego wynika, że ugięcie w belki w miejscu o współrzędnej x jest dane zależnością

$$w(x) = \frac{q}{24EI} x^2 (x^2 - 4lx + 6l^2) \quad (13)$$

gdzie $q = \frac{dF}{dx}$ jest obciążeniem poprzecznym, równym sile dF przypadającej na element belki o długości dx ; I jest momentem bezwładności na zginanie.

Jeżeli obciążenie q pochodzi od ciężaru belki jednorodnej na całej długości, to

$$q = \frac{mg}{l} = \frac{\rho Vg}{l} = \frac{\rho \pi r^2 l g}{l} = \rho g \pi r^2 = \frac{1}{4} \rho g \pi d^2 \quad (14)$$

gdzie ρ jest gęstością belki (czyli u nas – włosa), g jest ziemskim przyśpieszeniem grawitacyjnym, a d jest średnicą okrągłej belki (włosa).

Moment bezwładności na zginanie dla belki o przekroju kołowym jest równy

$$I = \frac{1}{64} \pi d^4 \quad (15)$$

Podstawiając zależności (14, 15) do (13) otrzymujemy wzór na ugięcie belki

$$w(x) = \frac{2\rho g}{3Ed^2} x^2 (x^2 - 4lx + 6l^2) \quad (16)$$

2.5. Charakterystyka włosów

Grubość włosów uwarunkowana jest genetycznie. Za włos cienki, uznaje się w Europie włos o średnicy 0,04 do 0,06 mm. Włos normalny ma 0,06 ÷ 0,08 mm, a gruby 0,08 ÷ 0,1 mm. Włosy Azjatów (rasa „żółta”) są natomiast grubsze. Ich średnica wynosi przeważnie 0,08 ÷

0,12 mm. Różnice budowy widać także w kształcie włosów. Azjaci mają włosy o przekroju kołowym i dlatego są one proste. Europejczycy mają włosy eliptyczne. Stopień eliptyczności decyduje o falowaniu się włosów. Lekko eliptyczne układają w miarę prosto, bardziej spłaszczone są faliste, a najbardziej spłaszczone kręcą się. Włosy kędzierzawe w przekroju poprzecznym są w kształcie nerki (lekko wklęsły). Natomiast włosy „afro” w przekroju poprzecznym mają kształt rogalika.

Podstawowym składnikiem włosa jest keratyna, nierozpuszczalne w wodzie białko fibrylarne (należące do grupy białek prostych o strukturze włókienkowej). W pigmentie włosa znajduje się barwnik zwany melaniną, który nadaje kolor włosom, oraz tłuszcze i związki mineralne.

Keratyna wytwarzana jest w naskórku (który także ma ją w swoim składzie) i zbudowana m.in. ze związków siarki i azotu. Chroni naskórek przed szkodliwymi czynnikami zewnętrznymi. Melanina nadaje kolor włosom i skórze. Rozróżniamy dwa rodzaje barwnika: ziarnisty i rozproszony. Ziarnisty nadaje włosom ciemny odcień, a rozproszony jasny. Im więcej we włosach barwnika rozproszonego tym włosy są jaśniejsze. Melanina także nie rozpuszcza się w wodzie. Keratyna jest związkiem dosyć trwałym, tylko nieliczne grzyby (saprotroficzne) mają zdolność rozkładu keratyny.

3. Przebieg ćwiczenia.

Zestawić układ pomiarowy wg rys. 5.



Rys. 5. Schemat układu pomiarowego

1 – laser z soczewką o ogniskowej 148 mm, 2 – śruba mikrometryczna, 3 – badany włos wraz z zamocowaniem, 4 – ekran z papierem milimetrowym, 5 – miernik mocy światła

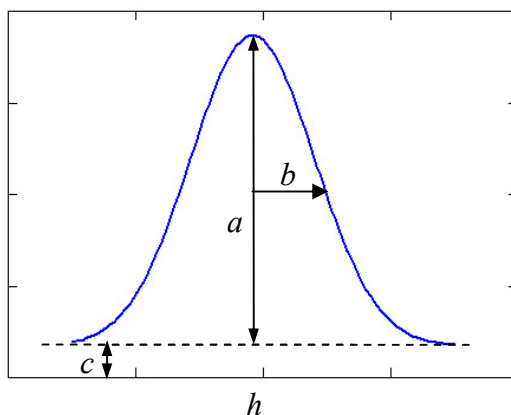
3.1. Badanie zależności mocy światła w prążku dyfrakcyjnym od centralności padania strumienia światła laserowego na włos

- Wyselekcjonować cienki włos, wyciąć z jego środkowej części fragment o długości około 5 cm i umieścić go w zamocowaniu 3. Ustawić laser tak, żeby strumień światła padał centralnie na włos w odległości około 0.5 cm od zamocowania. Ustawić zamocowanie 3 włosa tak, żeby włos znalazł się w ognisku soczewki.
- Umieścić czujnik miernika mocy 5 jak najbliżej ekranu tak, aby znajdował się w miejscu padania zerowego prążka. Zgasić oświetlenie sali. Śrubą mikrometryczną 2 wyregulować wysokość lasera tak, żeby prążki dyfrakcyjne na ekranie 4 zanikły.
- Za pomocą śruby mikrometrycznej 2 przesuwając laser w pionie (np. co 0.02 mm) i zanotować zależność mocy P w prążku dyfrakcyjnym od wysokości lasera h .

- a) Do punktów pomiarowych $P(h)$ uzyskanych dzięki wskazówkom z rozdziału 3.1, dla prążka zerowego, dopasować metodą najmniejszych kwadratów krzywą Gaussa o równaniu

$$y = a \cdot \exp[-(x-h)^2/b^2] + c$$

Obliczenia można przeprowadzić za pomocą programu MNK lub programu Origin. Należy znaleźć parametry a , b , c , h wraz z ich niepewnościami. Ponieważ do takich programów należy wprowadzić wstępne wartości poszukiwanych parametrów (tzw. „initial values” lub „guess values”), to przy poszukiwaniu tych wartości można posłużyć się rysunkiem, na którym przedstawiono znaczenie parametrów krzywej Gaussa.



W dalszych obliczeniach istotny jest tylko parametr h i $u(h)$, który ma matematyczną interpretację współrzędnej ekstremum funkcji Gaussa i fizyczną interpretację wysokości h lasera, przy której strumień światła laserowego pada centralnie na badany włos.

- b) Obliczenia z punktu a) powtórzyć dla punktów pomiarowych $P(h)$ dla dalszego prążka (np. o numerze 4).
- c) Narysować wykres $P(h)$ punktów pomiarowych wraz z dopasowaną krzywą, dla prążka zerowego i dalszego prążka.
- c) Z wartości niepewności $u(h)$ wyciągnąć wniosek, czy prążek zerowy czy dalszy prążek jest bardziej przydatny do pomiarów wysokości h lasera, przy której strumień światła laserowego pada centralnie na badany włos.

4.2. Obliczenia grubości włosa.

- a) Na podstawie dwóch fotografii prążków dyfrakcyjnych uzyskanych według wskazówek z punktu 3.2.g (tzn. dla włosa cienkiego i grubego) określić położenie y_n wszystkich minimów dyfrakcyjnych (ciemnych prążków) dzięki widocznej na zdjęciu siatce papieru milimetrowego. Uwzględnić rzędy prążków n zarówno dodatnie jak i ujemne.
Obliczyć niepewność $u(y)$ metodą typu B z działki elementarnej papieru milimetrowego.
- b) Dla każdego prążka obliczyć grubość włosa d_n , osobno dla włosa cienkiego i grubego, ze wzoru (9) dzięki zanotowanej w laboratorium odległości L włos-ekran i długości fali λ .
- c) Dla każdego prążka obliczyć niepewność $u(d_n)$ metodą propagacji niepewności na podstawie $u(y)$. Wielkości L i λ przyjąć jako dokładne (ich niepewności procentowe są niewielkie w porównaniu z niepewnością procentową położenia prążków $u(y) / y_n$).
- d) Obliczyć średnią ważoną d grubości włosa oraz jej niepewność $u(d)$ osobno dla włosa cienkiego i grubego (nie obliczać zwykłej średniej, patrz skrypt).

e) Wyniki obliczeń zapisać w dwóch tabelach (dla włosa cienkiego i grubego).

n	y_n	$u(y)$	L	λ	d_n	$u(d_n)$	d	$u(d)$
[-]	[10^{-3} m]	[10^{-3} m]	[m]	[10^{-6} m]	[10^{-3} m]	[10^{-3} m]	[10^{-3} m]	[10^{-3} m]

4.3. Obliczenia sztywności włosa.

a) Wyniki pomiarów wykonanych w punkcie 3.2 dla włosa cienkiego zapisać w tabeli

$l_2 = l_1 + \Delta l =$				$l_1 =$			
h_2	P_2	h_2 dopasowane	$u(h_2)$ dopasowane	h_1	P_1	h_1 dopasowane	$u(h_1)$ dopasowane
[10^{-3} m]	[μ W]	[10^{-3} m]	[10^{-3} m]	[10^{-3} m]	[μ W]	[10^{-3} m]	[10^{-3} m]

gdzie indeksami 2 i 1 oznaczono odpowiednie wartości dla włosa o oryginalnej długości l_2 i o długości przyciętej l_1 .

b) Do punktów pomiarowych $P(h)$ dopasować metodą najmniejszych kwadratów krzywą Gaussa o równaniu

$$y = a \cdot \exp[-(x-h)^2/b^2] + c$$

Obliczenia można przeprowadzić za pomocą programu MNK lub programu Origin, tak jak w punkcie 4.1.a. Należy znaleźć parametry a , b , c , h wraz z ich niepewnościami. W dalszych obliczeniach istotny jest tylko parametr h i $u(h)$, który ma matematyczną interpretację współrzędnej ekstremum funkcji i fizyczną interpretację wysokości h_2 lasera, przy której strumień światła laserowego pada centralnie na badany włos.

c) Obliczenia z punktu b) powtórzyć dla punktów pomiarowych $P(h)$ dla włosa przyciętego, wyznaczając w ten sposób wysokość lasera h_1 i jej niepewność $u(h_1)$.

d) Narysować wykres $P(h)$ punktów pomiarowych wraz z dopasowaną krzywą, dla włosa o oryginalnej długości l_2 i o długości przyciętej l_1 .

e) Powtórzyć obliczenia z punktów od a) do d) dla włosa grubego.

f) Obliczyć wartości modułu Younga dla badanych włosów metodą opisaną poniżej.

Dwa ugięcia włosa w miejscu o współrzędnej x (podać jej zmierzoną wartość) można wyrazić na podstawie wzoru (16) jako

$$w_2 = \frac{2\rho g}{3Ed^2} x^2(x^2 - 4l_2x + 6l_2^2) \quad w_1 = \frac{2\rho g}{3Ed^2} x^2(x^2 - 4l_1x + 6l_1^2)$$

gdzie długość włosa $l_2 = l_1 + \Delta l$ można obliczyć na podstawie pomiarów l_1 i Δl .

Ponieważ nie znamy ugięć w_1 i w_2 , a tylko wysokości wiązki światła laserowego h_1 i h_2

(które nie są odmierzane od położenia włosa nieugiętego pod wpływem siły ciężkości), to możemy obliczyć tylko różnicę ugięć $w_2 - w_1 = h_2 - h_1$

$$w_2 - w_1 = \frac{2\rho g}{3Ed^2} x^2 \left[(x^2 - 4l_2x + 6l_2^2) - (x^2 - 4l_1x + 6l_1^2) \right]$$

czyli

$$h_2 - h_1 = \frac{2\rho g}{3Ed^2} (l_2 - l_1) [6(l_2 + l_1) - 4x] x^2 \quad (17)$$

Należy obliczyć moduł Younga z powyższego równania przyjmując gęstość włosa jako gęstość keratyny $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$. Niepewność $u(E)$ obliczyć metodą propagacji niepewności bazując na niepewnościach $u(h_1)$, $u(h_2)$, $u(d)$, $u(l_1)$, $u(l_2)$, $u(x)$. Ostatnie trzy niepewności obliczyć metodą typu B.

- g) We wnioskach podać poprawnie zaokrąglony ostateczny wynik pomiarów wraz z niepewnością. Rozstrzygnąć, jak na sztywność włosa uznanego przez nas jako cienki lub gruby wpłynął moduł Younga, a jak jego średnica.

Literatura.

1. S. R. Meyer, Ardent: Wstęp do optyki, PWN W – wa 1997.
2. H. Klejman, Lasery, PWN W-wa 1977.
3. W. Wyrębski, Lasery właściwości budowa zastosowania specjalne, MON W-wa 1975.
4. red. F. Kaczmarek, II pracownia fizyczna. Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki dla zaawansowanych, PWN W-wa 1976.